Научная статья

УДК 517.977
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-163-178

ОБ ОДНОМ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОМ УПРАВЛЕНИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Айдыс Алексеевич Седипков

Институт математики им. С. Л. Соболева
630090, Новосибирск, Россия

sedipkov@math.nsc.ru

Аннотация

Исследуется задача управления решениями нелинейных дифференциальных уравнений с неустойчивыми положениями равновесия. Предполагается, что оператор линеаризованной задачи ограничен и его спектр расположен внутри правой полуплоскости. Доказано существование управления, при котором решение можно удерживать в любой наперед заданной окрестности положения равновесия сколь угодно долго.

Ключевые слова и фразы

кусочно-постоянное управление, неустойчивое положение равновесия, спектр, линеаризация.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008)

Для цитирования

Седипков А. Н. Об одном кусочно-постоянном управлении для нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Математические труды, 2024, Т. 27, № 1, С. 163-178. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-163-178

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С.163-178
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 163-178

ON ONE PIECE-CONSTANT CONTROL FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACE

Aydys A. Sedipkov

Sobolev Institute of Mathematic of SBRAS, 630090, Novosibirsk, Russia

anm11@rambler.ru

Abstract

The problem of controlling solutions to nonlinear differential equations is studied. equations with unstable equilibrium positions. It is assumed that the operator of the linearized problem is bounded and its spectrum is located inside the right half-plane. The existence of a control has been proven in which the solution can be maintained in any predetermined neighborhood of the equilibrium position for an arbitrarily long time.

Keywords

piecewise constant control, unstable equilibrium position, spectrum, linearization.

Funding

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Mathematics named after. S. L. Soboleva SB RAS (project № FWNF-2022-0008)

For citation

Sedipkov A. A. On one piecewise constant control for nonlinear differential equations in Banach space // Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 1, pp. 163-178. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-163-178

§ 1. Введение и предварительная информация

Изучение возможности построения управления параметрами динамической системы, при котором объект, описываемый этой системой, удерживается в некоторой области, является одним из актуальных направлений математической теории управления (см. [1–17]). Предметом настоящей работы являются вопросы, связанные с построением такого управления для непрерывной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением в банаховом пространстве, в окрестности неустойчивого положения равновесия.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 163-178
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 163-178

В конце 70-ых годов при исследовании вопроса о возможности управления эволюционными процессами, возникающими в каталитических реакторах и имеющими неустойчивые стационарные режимы, Т. И. Зеленяком была предложена идея о способе управления параметрами дифференциального уравнения, при котором его решение может удерживаться в малой окрестности неустойчивого стационарного решения сколь угодно долго (см. [8–9]). Эта идея была основана на эффекте «отталкивания» решения от неустойчивого стационарного решения с течением времени.

Для наглядности опишем кратко следующий пример для дифференциального уравнения $z'(t) = \lambda(z(t) - u)$, где $z(t)$ – фазовая переменная, рассматриваемая на интервале $(0, r)$ в момент времени t, u – вещественный параметр, λ – положительное число. Ясно, что для каждого фиксированного значения параметра u функция $z(t) \equiv u$ является неустойчивым стационарным решением. Тогда, если в начальный момент времени придадим параметру u значение 0, то решение $z(t)$ с начальным положением из интервала $(0, r)$ будет удаляться от левой границы 0 и приближаться к правой границе r. Если в некоторый момент времени, пока решение $z(t)$ не достигло правой границы, придадим параметру u значение r, то решение $z(t)$ пойдет в сторону левой границы. Продолжая процесс управления подобными переключениями, можно удерживать решение $z(t)$ в пределах рассматриваемого интервала $(0, r)$ сколь угодно долго.

В дальнейшем эта идея была применена в работах [10–13]. В них были исследованы задачи для различных классов уравнений путем линеаризации и сведения к соответствующей модельной задаче для сужения оператора линеаризованной задачи на корневое подпространство, отвечающее собственным значениям из правой полуплоскости. Однако разрешимость этих задач была установлена со следующим ограничением на характер неустойчивости: внутри правой полуплоскости спектр оператора линеаризованной задачи мог иметь не более двух собственных значений. Наличие этого ограничения позволяло применение геометрических свойств, характерных для одномерных и двумерных пространств, но не имеющих место в пространствах более высокой размерности. Позже появились работы [15–17], в которых для модельной задачи в конечномерном пространстве ограничение на количество собственных значений снимается, и доказано существование управления со счетным числом значений параметра u. Настоящая работа представляет собой обобщение подхода, изложенного в работе [17], для модельной задачи на уровне динамической системы, описываемой нелинейным автономным уравнением в банаховом пространстве, со следующим ограничением на характер неустойчивости: оператор линеаризованной задачи ограничен и его спектр расположен внутри правой полуплоскости.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс в банаховом пространстве $\mathbb{Z}$, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением

$$z'(t) = f(z(t), v), \tag{1}$$

где $z(t)$ – фазовая переменная со значениями в $\mathbb{Z}$, характеризующая состояние процесса в момент времени t, v – управляющий параметр со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{V}$, f – отображение из $\mathbb{Z} \times \mathbb{V}$ в $\mathbb{Z}$.

В дальнейшем для произвольного банахова пространства $\mathbb{B}$ через $||\cdot||_{\mathbb{B}}$ будем обозначать его норму, а через $0_{\mathbb{B}}$ — его нулевой элемент.

Пусть имеется управляющий субъект, который может мгновенно переключить значение управляющего параметра на новое, причем так, что продолжительность времени между соседними моментами переключений ограничена снизу наперед заданным $\tau_0 > 0$. В качестве *управления* будем рассматривать кусочно-постоянное отображение $v(t)$ такое, что

$$v(t) = v(t_{s-1}),\ t \in [t_{s-1}, t_s),\ t_s - t_{s-1} \geq \tau_0, s \in \mathbb{N}.$$

Для управления $v(t)$ *решением* уравнения

$$z'(t) = f(z(t), v(t)) \tag{2}$$

на отрезке $[t_{k-1}, t_s]$, где $s \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, s$, будем называть непрерывную на этом промежутке функцию $z(t)$ такую, что на каждом из промежутков

$$[t_{l-1}, t_l),\ l = k, \ldots, s,$$

функция $z(t)$ является непрерывно дифференцируемым решением уравнения (1) с параметром $v = v(t_{l-1})$.

Допустим, что при $v = 0_{\mathbb{V}}$ уравнение (1) имеет неустойчивое стационарное решение $z(t) \equiv 0_{\mathbb{Z}}$, т.е. $f(0_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{Z}}$. Целью настоящей работы является поиск условий, при которых разрешима *задача управления на бесконечном промежутке*, состоящая в существовании открытого подмножества некоторой окрестности Z точки $0_{\mathbb{Z}}$ такого, что для всякого начального положения z_0 из этого подмножества существует управление $v(t)$ со значениями из некоторой окрестности V точки $0_{\mathbb{V}}$, при котором для любого номера $s \in \mathbb{N}$ уравнение (2) имеет на отрезке $[t_0, t_s]$ одно и только одно решение $z(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z(t_0) = z_0$, и это решение не выходит за пределы окрестности Z при $t \in [t_0, t_s]$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 163-178
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 163-178

§ 3. Сведение к задаче управления на конечном промежутке

В дальнейшем для произвольного банахова пространства $\mathbb{B}$ через $B_{\mathbb{B}}(a;r)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса r с центром в точке a. Пространство линейных ограниченных операторов из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{Z}$ будем обозначать через $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{Z})$, а из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ — через $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$.

Предположим, что для каждого параметра v из некоторой окрестности V точки $0_{\mathbb{V}}$ отображение $f(z,v)$ дифференцируемо по переменной z в некотором шаре Z с центром в точке $0_{\mathbb{Z}}$, причем в самой точке $0_{\mathbb{Z}}$ отображение $f(z,v)$ дифференцируемо равномерно относительно параметра $v \in V$, т.е. для любых точек $z_0 \in Z$, $v \in V$ существует оператор $f_z(z_0,v) \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено условие

$$\lim_{r\to 0} \sup\{||f(z,v) - f(z_0,v) - f_z(z_0,v)(z-z_0)||_{\mathbb{Z}} \mid z \in B_{\mathbb{Z}}(z_0;r)\}/r = 0,$$

причем при $z_0 = 0_{\mathbb{Z}}$ это условие выполнено равномерно относительно параметра $v \in V$. Кроме того, потребуем дифференцируемость отображения $f(0_{\mathbb{Z}},v)$ и непрерывность производной $f_z(0_{\mathbb{Z}},v)$ в точке $0_{\mathbb{V}}$, т.е.

$$\lim_{r\to 0} \sup\{||f(0_{\mathbb{Z}},v) - f_v(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})v||_{\mathbb{Z}} \mid v \in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};r)\}/r = 0,$$

$$\lim_{v\to 0_{\mathbb{V}}} ||f_z(0_{\mathbb{Z}},v) - f_z(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} = 0.$$

Также предположим, что

$$\sup\{||f_z(z,v)||_{\mathbb{Z}} \mid z \in Z, v \in V\} < \frac{1}{6\tau_0},\ ||f_v(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})||_{\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{Z})} < \frac{1}{6\tau_0}.$$

Положим

$$\tau_1 = \frac{1}{6}(\max\{\sup\{||f_z(z,v)||_{\mathbb{Z}} \mid z \in Z, v \in V\}, ||f_v(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})||_{\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{Z})}\})^{-1}$$

и зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3\tau_1}]$. Тогда найдется число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что

$$B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};3\delta_\varepsilon) \subset Z, B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon) \subset V$$

и для любой точки $v \in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$||f(0_{\mathbb{Z}},v) - f_v(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})v||_{\mathbb{Z}} < \varepsilon\delta_\varepsilon,\ ||f_z(0_{\mathbb{Z}},v) - f_z(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} < \varepsilon, \tag{3}$$

а для любого радиуса $r \in (0, 2\delta_\varepsilon]$ и точки $z \in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};r)$ справедливо неравенство

$$||\varphi(z;v)||_{\mathbb{Z}} < \varepsilon r, \tag{4}$$

где
$$\varphi(z;v) = f(z,v) - f(0_{\mathbb{Z}},v) - f_z(0_{\mathbb{Z}},v)z.$$

Из определения числа τ_1 получаем,что справедливы неравенства
$$||f_z(z,v)||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \leq \frac{1}{6\tau_1},\ z \in Z,\ v \in V, \quad ||f_v(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})||_{\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{Z})} \leq \frac{1}{6\tau_1}.$$

Отсюда и из выбора числа ε, а также первого неравенства в формуле (3) получаем, что при $z \in Z$ и $v \in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ справедливы неравенства
$$||f(z,v)||_{\mathbb{Z}} \leq ||f(z,v) - f(0_{\mathbb{Z}},v)||_{\mathbb{Z}} + ||f(0_{\mathbb{Z}},v) - f_v(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})v||_{\mathbb{Z}}$$
$$+||f_v(0_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{V}})||_{\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{Z})}||v||_{\mathbb{V}} < ||f(z,v) - f(0_{\mathbb{Z}},v)||_{\mathbb{Z}} + \frac{\delta_\varepsilon}{2\tau_1}.$$

Тогда по теореме о конечном приращении (см. [18, гл. 10, § 4]) приходим к тому, что для любых точек $z_0 \in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};2\delta_\varepsilon)$, $z,\widetilde{z} \in B_{\mathbb{Z}}(z_0,\delta_\varepsilon)$ и $v \in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ справедливы неравенства
$$||f(z,v)||_{\mathbb{Z}} < \frac{1}{6\tau_1}||z||_{\mathbb{Z}} + \frac{\delta_\varepsilon}{2\tau_1} \leq \frac{\delta_\varepsilon}{\tau\ _1},\ ||f(z,v) - f(\widetilde{z},v)||_{\mathbb{Z}} \leq \frac{1}{6\tau_1}||z-\widetilde{z}||_{\mathbb{Z}}. \quad (5)$$

Отсюда на основании теоремы о локальной разрешимости (см. [19, гл. 7, § 1]), обобщающей классическую теорему Пикара, для любого начального положения $z_0 \in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};2\delta_\varepsilon)$ и момента времени t_0 уравнение (1) с параметром $v \in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ имеет на промежутке $[t_0,t_0+\tau_1)$ одно и только одно решение $z(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z(t_0) = z_0$. Более того, значения этого решения при $t \in [t_0,t_0+\tau_1)$ лежат в шаре $B_{\mathbb{Z}}(z_0;\delta_\varepsilon)$.

Зафиксируем произвольное число $\tau \in (\tau_0,\tau_1)$. Тогда из условия (5) получаем, что для уравнения (2) справедлива

Теорема 1. *Для любого начального положения $z_0 \in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};\delta_\varepsilon)$, моментов времени t_0, t_1, t_2, удовлетворяющих неравенствам*
$$\tau_0 \leq t_1 - t_0 \leq \tau,\ \tau_0 \leq t_2 - t_1 \leq \tau,$$
и значения $v_0 \in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ уравнение (2) с управлением
$$v(t) = \begin{cases} 0_{\mathbb{V}},\ t \in [t_0,t_1), \\ v_0,\ t \in [t_1,t_2), \end{cases}$$
имеет на отрезке $[t_0,t_2]$ одно и только одно решение $z(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z(t_0) = z_0$. Кроме того, значения этого решения при $t \in [t_0,t_2]$ лежат в шаре $B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};3\delta_\varepsilon)$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 163-178
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 163-178

Доказательство. Пусть $z_0 \in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};\delta_\varepsilon)$ и $t_1 \in [t_0+\tau_0, t_0+\tau]$. Тогда в силу условия (5) и выбора числа τ уравнение (1) с параметром $v = 0_{\mathbb{V}}$ имеет на отрезке $[t_0,t_1]$ одно и только одно решение $z(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z(t_0)=z_0$. Кроме, того при $t\in[t_0,t_1]$ это решение будет лежать в шаре $B_{\mathbb{Z}}(z_0;\delta_\varepsilon)$ и, следовательно, точка $z_1 = z(t_1)$ будет лежать в шаре $B_{\mathbb{Z}}(z_0;\delta_\varepsilon)$.

Заметим, что из выбора z_0 следует, что $B_{\mathbb{Z}}(z_0;\delta_\varepsilon)\subset B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};2\delta_\varepsilon)$. Тогда в силу условия (5) заключаем, что уравнение (1) с параметром $v = v_0$, где $v_0\in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$, имеет на отрезке $[t_1,t_2]$, где $t_2\in[t_1+\tau_0,t_1+\tau]$, одно и только одно решение $z(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z(t_1)=z_1$. Кроме, того при $t\in[t_1,t_2]$ это решение будет лежать в шаре $B_{\mathbb{Z}}(z_1;\delta_\varepsilon)$. Для завершения доказательства теоремы остается отметить, что $B_{\mathbb{Z}}(z_1;\delta_\varepsilon)\subset B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};3\delta_\varepsilon)$. □

Для любого номера $s\in\mathbb{N}$ положим $t_s = t_{s-1}+\tau$. Допустим, что разрешима следующая *задача управления на конечном промежутке*, состоящая в существовании числа $r\in(0,\delta_\varepsilon]$ такого, что для любого начального положения $z_0\in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};r)$ и момента времени t_0 найдется значение $v_0\in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ такое, что на отрезке $[t_0,t_2]$ решение $z(t)$ уравнения (2) с управлением

$$v(t)=\begin{cases}0_{\mathbb{V}},\ t\in[t_0,t_1),\\ v_0,\ t\in[t_1,t_2),\end{cases}$$

и начальными данными $z(t_0)=z_0$ будет удовлетворять условию

$$z(t_2)\in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};r).$$

Отсюда и из теоремы 1 приходим к справедливости высказывания: для любого нечетного номера $s\in\mathbb{N}$, положения $z_{s-1}\in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};r)$ найдется управление $v(t)$ со значениями из шара $B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ такое, что решение $z(t)$ уравнения (2) на отрезке $[t_{s-1},t_{s+1}]$ с начальными данными $z(t_{s-1})=z_{s-1}$ не покидает шар $B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};3\delta_\varepsilon)$ и удовлетворяет условию $z_{s+1}\in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};r)$, где $z_{s+1}=z(t_{s+1})$. Тогда на основании аксиомы индукции получаем, что для любого начального положения $z_0\in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};r)$, момента времени t_0, а также нечетного номера $s\in\mathbb{N}$ существует управление $v(t)$ со значениями из шара $B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ такое, что на отрезке $[t_0,t_{s+1}]$ уравнение (2) имеет одно и только одно решение $z(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z(t_0)=z_0$, и это решение не выходит за пределы шара $B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};3\delta_\varepsilon)$ при $t\in[t_0,t_{s+1}]$.

Таким образом, вопрос о разрешимости задачи управления на бесконечном промежутке сводится к разрешимости задачи управления на конечном промежутке.

§ 4. Линеаризация задачи управления

Положим $A = f_z(0_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{V}})$ и допустим, что спектр оператора A расположен внутри правой полуплоскости. Далее, положим $B = f_v(0_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{V}})$ и предположим, что оператор B взаимно однозначно отображает $\mathbb{V}$ на $\mathbb{Z}$. Тогда по теореме Банаха об обратном операторе оператор B и, следовательно, оператор $C = -A^{-1}B$ осуществляют изоморфизм между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{Z}$.

Задачу управления на конечном промежутке будем решать с помощью решений линейного уравнения

$$x'(t) = A(x(t) - u), \tag{6}$$

где параметр $u \in \mathbb{Z}$.

Напомним (см. [19, гл. 7, § 1]), что ее решение с начальными данными $x(t_0) = x_0$ представимо в виде $x(t) = u + e^{A(t-t_0)}(x_0 - u)$, где для оператор-функции $e^{At} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$, называемой *операторной экспонентой*, справедливо равенство $e^{A(t+\widetilde{t})} = e^{At}e^{A\widetilde{t}}$ при любых $t, \widetilde{t} \in \mathbb{R}$. Кроме того (см. [19, гл. 1, § 4]), для операторной экспоненты справедлива оценка $||e^{At}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \leq e^{t||A||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}}$ при $t \geq 0$.

Положим $S = e^{-A\tau}(e^{A\tau} - E)$, где E – тождественный оператор в пространстве $\mathbb{Z}$. Тогда для решений линейного уравнения (6) справедлива

Лемма 1. *Оператор S непрерывно обратим, причем для любого положения $x_0 \in \mathbb{Z}$ и момента времени t_0 значение $x(t_0 + \tau)$ решения уравнения (6) с параметром $u = S^{-1}x_0$ и начальными данными $x(t_0) = x_0$ совпадает с точкой $0_{\mathbb{Z}}$.*

Доказательство. Покажем, что оператор S, равный $E - e^{-A\tau}$, непрерывно обратим. Для этого докажем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-A\tau k}$ сходится абсолютно.

Поскольку спектр оператора A лежит внутри правой полуплоскости, то существует положительное $\mu > 0$ такое, что каждая точка λ спектра расположена правее числа μ, т.е. $\mu < \mathrm{Re}\lambda$. Тогда в силу теоремы о существовании строгого показателя экспоненциального роста (см. [19, гл. 1, § 4]) для числа μ найдется положительное N такое, что $||e^{-At}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \leq Ne^{-\mu t}$ при $t \geq 0$, и значит, $||e^{-A\tau k}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \leq Ne^{-\mu\tau k}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда устанавливаем, что числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Ne^{-\mu\tau k}$ сходится к числу $N(1 - e^{-\mu\tau})^{-1}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-A\tau k}$ сходится к некоторому оператору из $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$.

Наконец, из равенств

$$S\sum_{k=0}^{n} e^{-A\tau k} = \sum_{k=0}^{n}(e^{-A\tau k} - e^{-A\tau(k+1)}) = E - e^{-A\tau(n+1)}$$

приходим к заключению, что сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-A\tau k}$ является обратным оператором к S, и, значит, оператор S непрерывно обратим.

Теперь зафиксируем произвольное положение $x_0 \in \mathbb{Z}$ и момент времени t_0. Тогда решение $x(t)$ уравнения (6) с параметром $u = S^{-1}x_0$ и начальными данными $x(t_0) = x_0$ представимо в виде

$$x(t) = u + e^{A(t-t_0)}(x_0 - u) = e^{A(t-t_0)}x_0 - (e^{A(t-t_0)} - E)S^{-1}x_0.$$

Напомним, что оператор $e^{-A\tau}$ является обратным к $e^{A\tau}$. Тогда значение $x(t_0+\tau)$ представимо в виде

$$x(t_0+\tau) = e^{A\tau}x_0 - (e^{A\tau} - E)S^{-1}x_0 = e^{A\tau}(E - e^{-A\tau}(e^{A\tau} - E)S^{-1})x_0.$$

Отсюда и из определения оператора S заключаем, что

$$x(t_0+\tau) = e^{A\tau}(E - e^{-A\tau}(e^{A\tau} - E)S^{-1})x_0 = e^{A\tau}(E - SS^{-1})x_0 = 0_{\mathbb{Z}}.$$

□

Для решений уравнений (1) и (6) справедлива

Теорема 2. *Для любого радиуса $r \in (0;\delta_\varepsilon]$, а также точки $z_0 \in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}, r)$ и момента времени t_0 решение $z(t)$ уравнения (1) с параметром $v \in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ и начальными данными $z(t_0) = z_0$, а также решение $x(t)$ уравнения (6), где $u = Cv$, с начальными данными $x(t_0) = z_0$ удовлетворяют при $t \in [t_0, t_0+\tau]$ неравенству*

$$||z(t) - x(t)||_{\mathbb{Z}} < K\tau\varepsilon(3\delta_\varepsilon + r),$$

где $K = e^{\tau||A||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}}$, причем, если $v = 0_{\mathbb{V}}$, то

$$||z(t) - x(t)||_{\mathbb{Z}} < K\tau\varepsilon r.$$

Доказательство. Пусть $v \in B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ и $r \in (0;\delta_\varepsilon]$. Выберем точку $z_0 \in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}; r)$ и момент времени t_0.

Напомним, что в силу условия (5) и выбора числа τ уравнение (1) с параметром v имеет на отрезке $[t_0, t_0+\tau]$ одно и только одно решение $z(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z(t_0) = z_0$.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$z'(t) = A(z(t) - Cv) + \psi(z(t), v),$$

где
$$\psi(z;v) = f(0_{\mathbb{Z}},v) - Bv + (f_z(0_{\mathbb{Z}},v) - A)z + \varphi(z;v).$$
Для ее решения $z(t)$ и решения $x(t)$ уравнения (6) с параметром $u = Cv$, рассматриваемых на отрезке $[t_0, t_0+\tau]$ и имеющих одинаковое начальное положение в точке z_0, положим $h(t) = z(t) - x(t)$.

Ясно, что разность $h(t)$ является решением задачи Коши для уравнения
$$h'(t) = Ah(t) + \psi(z(t);v),\ t \in [t_0, t_0+\tau],$$
с начальными данными $h(t_0) = 0_{\mathbb{Z}}$.

Найдем решение этой задачи Коши. Для этого воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде $h(t) = e^{A(t-t_0)}y(t)$.

Подставив эту функцию в рассматриваемое неоднородное уравнение и пользуясь свойством операторной экспоненты $\frac{de^{A(t-t_0)}}{dt} = Ae^{A(t-t_0)}$, получим
$$e^{A(t-t_0)}y'(t) = \psi(z(t);v),\ t \in [t_0, t_0+\tau].$$

Поскольку оператор $e^{-A(t-t_0)}$ является обратным к $e^{A(t-t_0)}$, то из начальных данных $y(t_0) = 0_{\mathbb{Z}}$ получаем, что
$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(\xi-t_0)}\psi(z(\xi);v)\,d\xi,\ t \in [t_0, t_0+\tau],$$
и, следовательно,
$$h(t) = e^{A(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(\xi-t_0)}\psi(z(\xi);v)\,d\xi = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)}\psi(z(\xi);v)\,d\xi.$$
Отсюда и из оценки для операторной экспоненты приходим к справедливости неравенства
$$||h(t)||_{\mathbb{Z}} \le e^{(t-t_0)||A||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}}\int\limits_{t_0}^{t} ||\psi(z(\xi);v)||_{\mathbb{Z}}\,d\xi.$$

Напомним, что параметр v лежит в шаре $B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}};\delta_\varepsilon)$ а точка z_0 — в шаре $B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};r) \subset B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};\delta_\varepsilon)$. Тогда в силу условия (5) и выбора числа τ решение $z(t)$ уравнения (1) с начальными данными $z(t_0) = z_0$ остается на всем промежутке $[t_0, t_0+\tau]$ в пределах шара $B_{\mathbb{Z}}(z_0;\delta_\varepsilon) \subset B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}};2\delta_\varepsilon)$. Отсюда и из оценок (3)-(4), получаем, что при $t \in [t_0, t_0+\tau]$ справедливы неравенства
$$||\psi(z(t);v)||_{\mathbb{Z}} \le ||f(0_{\mathbb{Z}},v) - Bv||_{\mathbb{Z}} + ||f_z(0_{\mathbb{Z}},v) - A||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}||z(t)||_{\mathbb{Z}} +$$

$$+||\varphi(z(t);v)||_{\mathbb{Z}} < \varepsilon\delta_\varepsilon + 2\varepsilon\delta_\varepsilon + \varepsilon r = \varepsilon(3\delta_\varepsilon + r).$$

Таким образом, приходим к справедливости неравенств

$$||h(t)||_{\mathbb{Z}} < e^{(t-t_0)||A||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}}(t-t_0)\varepsilon(3\delta_\varepsilon + r) \leq K\tau\varepsilon(3\delta_\varepsilon + r),$$

а при $v = 0_{\mathbb{V}}$ — оценке $||z(t) - x(t)||_{\mathbb{Z}} < K\tau\varepsilon r$.

□

§ 5. Разрешимость задачи управления

Рассмотрим задачу управления на конечном промежутке с начальным моментом времени t_0. Искомые значения управления $v(t)$ будем строить с помощью решений u уравнения $Su = z$, где $S = e^{-A\tau}(e^{A\tau} - E)$. Напомним, что по лемме 1 оператор S непрерывно обратим.

Положим $\gamma_\varepsilon = \delta_\varepsilon(\tau\varepsilon + 1)^{-1}$, $r = \gamma_\varepsilon K^{-1} M_C M_S$, где

$$M_C = \min\{1, 1/||C^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z},\mathbb{V})}\},\ M_S = \min\{1, 1/||S^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}\}.$$

Выберем начальное положение $z_0 \in \mathbb{B}_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}; r)$. Напомним, что решение $x(t)$ уравнения (6) с параметром $u = 0_{\mathbb{Z}}$ и начальными данными $x(t_0) = z_0$ представимо в виде $x(t) = e^{A(t-t_0)}z_0$. Тогда из оценки для операторной экспоненты получаем, что для значения $x(t_1)$, где $t_1 = t_0 + \tau$, справедливы неравенства

$$||x(t_1)||_{\mathbb{Z}} \leq ||e^{A\tau}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}||z_0||_{\mathbb{Z}} \leq Kr = \gamma_\varepsilon M_C M_S.$$

Далее, отметим, что по построению $r = \gamma_\varepsilon K^{-1} M_C M_S < \delta_\varepsilon$. Поскольку $z_0 \in \mathbb{B}_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}; r)$, то в силу теоремы 2 получаем, что для решения $z(t)$ уравнения (1) с параметром $v = 0_{\mathbb{V}}$ и начальными данными $z(t_0) = z_0$ имеет место оценка

$$||z(t_1) - x(t_1)||_{\mathbb{Z}} < K\tau\varepsilon r = \tau\varepsilon\gamma_\varepsilon M_C M_S.$$

Отсюда и из определения коэффициента M_S получаем, что для значения $z(t_1)$ справедливы неравенства

$$||z(t_1)||_{\mathbb{Z}} \leq ||z(t_1) - x(t_1)||_{\mathbb{Z}} + ||x(t_1)||_{\mathbb{Z}} < (\tau\varepsilon + 1)\gamma_\varepsilon M_C M_S \leq (\tau\varepsilon + 1)\gamma_\varepsilon M_C,$$

а для параметра $u_0 = S^{-1}z(t_1)$ —

$$||u_0||_{\mathbb{Z}} \leq ||S^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}||z(t_1)||_{\mathbb{Z}} < ||S^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}\times$$

$$\times(\tau\varepsilon + 1)\gamma_\varepsilon M_C M_S \leq (\tau\varepsilon + 1)\gamma_\varepsilon M_C.$$

И наконец, учтя определения коэффициентов γ_ε и M_C, получаем справедливость неравенств

$$||z(t_1)||_{\mathbb{Z}} < (\tau\varepsilon + 1)\gamma_\varepsilon M_C \le (\tau\varepsilon + 1)\gamma_\varepsilon = \delta_\varepsilon,$$

$$||C^{-1}u_0||_{\mathbb{V}} < ||C^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathbb{Z},\mathbb{V})}(\tau\varepsilon + 1)\gamma_\varepsilon M_C \le (\tau\varepsilon + 1)\gamma_\varepsilon = \delta_\varepsilon,$$

т.е. значения $v_0 = C^{-1}u_0$ и $z_1 = z(t_1)$ лежат в шарах $B_{\mathbb{V}}(0_{\mathbb{V}}; \delta_\varepsilon)$ и $B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}; \delta_\varepsilon)$ соответственно.

Теперь рассмотрим решение $z(t)$ уравнения (1) с параметром $v = v_0$ и начальными данными $z(t_1) = z_1$, а также решение $x(t)$ уравнения (6) с параметром $u = u_0$ и начальными данными $x(t_1) = z_1$. Из расположения точек v_0, z_1 и теоремы 2 получаем, что для значений $z(t_2)$ и $x(t_2)$, где $t_2 = t_1 + \tau$, справедлива оценка

$$||z(t_2) - x(t_2)||_{\mathbb{Z}} < K\tau\varepsilon(3\delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon) = 4K\tau\varepsilon\delta_\varepsilon,$$

а в силу леммы 1 справедливо равенство $x(t_2) = 0_{\mathbb{Z}}$. Следовательно, значение $z(t_2)$ находится в пределах шара $B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}; 4K\tau\varepsilon\delta_\varepsilon)$. Отсюда и из допущения $4K\tau\varepsilon\delta_\varepsilon \le r$ приходим к тому, что управление

$$v(t) = \begin{cases} 0_{\mathbb{V}}, \ t \in [t_0, t_1), \\ v_0, \ t \in [t_1, t_2), \end{cases}$$

есть искомое управление, при котором решение $z(t)$ уравнения (2) на отрезке $[t_0, t_2]$ с начальными данными $z(t_0) = z_0$ из шара $B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}; r)$ возвращается в шар $B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}; r)$ в момент времени t_2.

Наконец, из определения радиуса r получаем, что условие $4K\tau\varepsilon\delta_\varepsilon \le r$ эквивалентно неравенству

$$(\tau\varepsilon)^2 + \tau\varepsilon \le \frac{M_C M_S}{4K^2}.$$

Поскольку правая часть неравенства положительна и не зависит от ε, то при достаточно малых ε приходим к разрешимости задачи управления на конечном промежутке.

В итоге для задачи на бесконечном промежутке справедлива

Теорема 3. *Пусть для каждого параметра v из некоторой окрестности V точки $0_{\mathbb{V}}$ отображение $f(z, v)$ дифференцируемо по переменной z в некотором шаре Z с центром в точке $0_{\mathbb{Z}}$, причем в самой точке $0_{\mathbb{Z}}$ отображение $f(z, v)$ дифференцируемо равномерно относительно параметра $v \in V$, а в точке $0_{\mathbb{V}}$ отображение $f(0_{\mathbb{Z}}, v)$ дифференцируемо и производная $f_z(0_{\mathbb{Z}}, v)$ непрерывна. Если*

$$\sup\{||f_z(z, v)||_{\mathbb{Z}} \mid z \in Z, v \in V\} < \frac{1}{6\tau_0}, \ ||f_v(0_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{V}})||_{\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{Z})} < \frac{1}{6\tau_0},$$

а спектр оператора $f_z(0_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{V}})$ расположен внутри правой полуплоскости и оператор $f_v(0_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{V}})$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{V}$ на $\mathbb{Z}$, то существует радиус $r > 0$ такой, что для любого положения $z_0 \in B_{\mathbb{Z}}(0_{\mathbb{Z}}; r)$ и момента времени t_0 существует управление $v(t)$ со значениями из окрестности V, при котором для любого нечетного номера $s \in \mathbb{N}$ на отрезке $[t_0, t_{s+1}]$ уравнение (2) имеет одно и только одно решение $z(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z(t_0) = z_0$, и это решение при $t \in [t_0, t_{s+1}]$ остается в пределах окрестности Z.

Литература

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. Пер. с англ.* М.: Едиториал УРСС, 2004.

2. *Fury M., Nistri P., Pera M. P., Zezza P. L.* Linear controllability by piecewise constant control with assigned switching times // *J. Optimize Theory and Apl.* 1985. V. 45, N 2. P. 219-229.

3. *Zezza P.* On reachable set for linear systems with piecewise constant controls // *Bol. Unione mat. Ital.* 1986. V. 5, N 1. P. 127-137.

4. *Gryn L.* Discrete feedback stabilization of semilinear control systems // *Control, Optim. Calc. Var.* 1996. V. 1. P. 207-224.

5. *Квитко А. Н.* Об одной задаче управления // *Дифференц. уравнения.* 2004. Т. 40, № 6. С. 740-746.

6. *Лапин С. В.* Кусочно-постоянная стабилизация систем, линейных относительно управления // *Автоматика и телемеханика.* 1992. № 6. С. 36-45.

7. *Bourdin L., Trelat E.* Robustness under control sampling of reachability in fixed time for nonlinear control systems // *Math. Control Signals Syst.* 2021. V. 33, N 3. P. 515-551.

8. *Зеленяк Т. И., Слинько М. Г.* Динамика каталитических систем I // *Кинетика и катализ.* 1977. Т. 18, № 5. С. 1235-1248.

9. *Зеленяк Т. И., Слинько М. Г.* Динамика каталитических систем II // *Кинетика и катализ.* 1977. Т. 18, № 6. С. 1548-1560.

10. *Мусиенко Е. И.* Управление решением одной параболической задачи в окрестности неустойчивого стационарного решения // *Динамика сплошной среды.* 1981. № 51. С. 68-83.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 163-178
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 163-178

11. *Мусиенко Е. И.* Управление решением некоторых параболических задач в окрестности неустойчивого стационарного решения // *Дифференц. уравнения.* 1984. Т. 20, № 12. С. 2120-2130.

12. *Ивирсин М. Б.* Параметрическое управление решениями эволюционной задачи в окрестности неустойчивого стационарного режима // *Сиб. мат. журн.* 2007. Т. 48, № 4. С. 760-771.

13. *Ивирсин М. Б.* Релейное управление эволюционным процессом в банаховом пространстве в окрестности неустойчивого стационарного режима // *Сиб. мат. журн.* 2010. Т. 51, № 1. С. 32-47.

14. *Квитко А. Н.* Об одном методе решения граничной задачи для нелинейной управляемой системы в классе дискретных управлений // *Дифференц. уравнения.* 2008. Т. 44, № 11. С. 1499-1509.

15. *Квитко А. Н., Якушева Д. Б.* Решение граничной задачи для нелинейной стационарной управляемой системы на бесконечном промежутке времени с учетом дискретности управления // *Информационно-управляющие системы.* 2011. № 6. С. 25-29.

16. *Квитко А. Н., Литвинов Н. Н.* Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.* 2022. Т. 18, № 1. С. 18-36.

17. *Седипков А. А.* Параметрическое управление решениями линейной эволюционной задачи в окрестности неустойчивого положения равновесия // *Сиб. мат. журн.* 2019. Т. 60, № 4. С. 874-880.

18. *Зорич В. А. Математический анализ. Часть II.* М.: МЦМНО, 2012.

19. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

REFERENCES

1. *R. E. Kalman, P. L. Falb, and M. A. Arbib. Topics in Mathematical System Theory.* New York: McGraw-Hill, 1969.

2. *M. Fury, P. Nistri, M. P. Pera, P. L. Zezza* Linear controllability by piecewise constant control with assigned switching times // *J. Optimize Theory and Apl.* 1985. V. 45, N 2. P. 219-229.

3. *P. Zezza* On reachable set for linear systems with piecewise constant controls // *Bol. Unione mat. Ital.* 1986. V. 5, N 1. P. 127-137.

4. *L. Gryn* Discrete feedback stabilization of semilinear control systems // *Control, Optim. Calc. Var.* 1996. V. 1. P. 207-224.

5. *A. N. Kvitko* On a control problem // *DIEQ.* 2004. V. 40, N 6. P. 789-796.

6. *Lapin S. V.* Piecewise-constant stabilization of systems linear in control // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53, N 6. P. 816-822.

7. *Bourdin L., Trelat E.* Robustness under control sampling of reachability in fixed time for nonlinear control systems // *Math. Control Signals Syst.* 2021. V. 33, N 3. P. 515-551.

8. *Zelenyak T. I., Slin'ko M. G.* The dynamics of catalytic systems I // *KICA*. 1977. V. 18, N 5. P. 1235-1248. (in Russian)

9. *Zelenyak T. I., Slin'ko M. G.* The dynamics of catalytic systems II // *KICA*. 1977. V. 18, N 6. P. 1548-1560. (in Russian)

10. *Musienko E. I.* The control over the solution of a parabolic problem in a neighbourhood of an unstable stationary solution // *Dinamika Sploshn. Sredy.* 1981. N 51. P. 68-83. (in Russian)

11. *Musienko E. I.* Control of solutions of some parabolic problems in the neighborhood of unstable stationary solutions// *DIEQ.* 1984. V. 20, N 12. P. 2120-2130. (in Russian)

12. *Ivirsin M. B.* Parametric control of solutions to an evolution problem in a neighborhood of an unstable stationary regime // *SIMJ.* 2007. V. 48, N 4. P. 606-615.

13. *Ivirsin M. B.* Relay control of an evolution process in a Banach space in a neighborhood of an unstable stationary regime // *SIMJ.* 2010. V. 51, N 1. P. 25-37.

14. *Kvitko A. N.* A method for solving boundary value problems for nonlinear control systems in the class of discrete controls // *DIEQ.* 2008. V. 44, N 11. P. 1559-1570.

15. *Kvitko A. N., Yakusheva, D. B.* Solution of the boundary-value problem for nonlinear steady-state controlled system on the infinite time interval considering discrete control function // *Inform. Control Syst.* 2011. N 6. P. 25-29. (in Russian)

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 163-178
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 163-178

16. *Kvitko A. N., Litvinov, N. N.* Solution of a local boundary problem for a non-linear non-stationary system in the class of discrete controls // *Vestn. St. Petersburg Univ. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.* 2022. V. 18, N 1. P. 18-36. (in Russian)

17. *Sedipkov A. A.* Parametric control of solutions to a linear evolution problem in a neighborhood of an unstable equilibrium // *SIMJ.* 2019. V. 60, N 4. P. 685-689.

18. *Zorich V. A. Mathematical Analysis II* Berlin: Springer, 2016.

19. *Daletskii Yu. L., Krein, M. G. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space.* Providence: Amer. Math. Soc., 1974.

Информация об авторе

Седипков Айдыс Алексеевич, кандидат физико-математических наук

SPIN 4985-3362 AuthorID 699875

Scopus Author ID 47562092400

Author Information

Aydys A. Sedipkov, Candidate of Mathematics

SPIN 4985-3362 AuthorID 699875

Scopus Author ID 47562092400

Статья поступила в редакцию 12.10.2023; одобрена после рецензирования 10.04.2024; принята к публикации 17.05.2024

The article was submitted 12.10.2023; approved after reviewing 10.04.2024; accepted for publication 17.05.2024

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 163-178
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 163-178